2.3.4 Rovnice v podílovém tvaru

Předpoklady: 2301

Řešíme rovnici: $\frac{2x+5}{3x-6}=0$.

Nejdřív musíme zajistit, aby ve jmenovateli nebyla nula $\Rightarrow$ $3x-6\neq 0 \Rightarrow x\neq 2$.

Jakmile máme podmínku, na jmenovateli nezáleží. K tomu, aby byl celý zlomek nulový, stačí, když je nula v čitateli.

$2x+5=0$

$2x=-5$

$x=-\frac{5}{2}$

POZOR: Musíme zkontrolovat, jestli jsme výsledek nevyloučili v podmínkách.

$K=\left\{-\frac{5}{2}\right\}$

Př. 1: Vyřeš rovnice:

a) $\frac{3x-\sqrt{2}}{3x+2}=0$ b) $\frac{\sqrt{5}x-5x+1}{13x-\sqrt{10}}=0$

a) $\frac{3x-\sqrt{2}}{3x+2}=0$ Podmínky: $3x+2\neq 0 \Rightarrow x\neq -\frac{2}{3}$.

Čitatel: $3x-\sqrt{2}=0$.

$x=\frac{\sqrt{2}}{3}$ $K=\left\{\frac{\sqrt{2}}{3}\right\}$

b) $\frac{\sqrt{5}x-5x+1}{13x-\sqrt{10}}=0$ Podmínky: $13x-\sqrt{10}\neq 0 \Rightarrow x\neq \frac{\sqrt{10}}{13}$.

Čitatel: $\sqrt{5}x-5x+1=0$.

$x\left(\sqrt{5}-5\right)=-1$

$x=\frac{-1}{\sqrt{5}-5}=\frac{1}{5-\sqrt{5}}\cdot\frac{5+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}=\frac{5+\sqrt{5}}{20}$ $K=\left\{\frac{5+\sqrt{5}}{20}\right\}$

Př. 2: Vyřeš rovnice:

a) $\frac{x^2-x-6}{x-2}=0$ b) $\frac{x^2+4x+3}{x^2-4x+3}=0$

a) $\frac{x^2-x-6}{x-2}=0$ Podmínky: $x-2\neq 0 \Rightarrow x\neq 2$.

Čitatel: $x^2-x-6=0$.

$(x-3)(x+2)=0$

$x_1 = 3$; $x_2 = -2$ $\qquad$ $K = \{-2;3\}$

b) $\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-4x+3} = 0$ $\qquad$ Podmínky: $x^2-4x+3 \neq 0 \Rightarrow (x-3)(x-1) \neq 0 \Rightarrow x \neq 3; x \neq 1$.

Čitatel: $x^2+4x+3=0$.

$(x+3)(x+1)=0$

$x_1 = -3$; $x_2 = -1$ $\qquad$ $K = \{-3;-1\}$

Pedagogická poznámka: V příkladu a) se studenti setkají se třemi typy problémů:
Někteří nedokážou rozložit mnohočleny na součin (chyba paměti).
Někteří si nepamatují, jak se řeší rovnice v součinovém tvaru (opět paměť nebo neschopnost nahlédnout, že jde o stejný problém jako v minulé hodině).
Někteří mají problém se smířit s tím, že příklad má dvě řešení zatímco předchozí měly řešení pouze jedno (neopodstatněné sebeomezování).

Pedagogická poznámka: Následující příklady jsou nové tím, že vyžadují vyřazení jednoho z řešení kvůli podmínkám. Dopředu studenty neupozorňuji, jenom jim říkám (pokud kořen rovnice nevyřadí), že mají řešení špatně.

Př. 3: Vyřeš rovnice:

a) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4} = 0$ $\qquad$ b) $\dfrac{x^2-9}{x^2+2x-3} = 0$ $\qquad$ c) $\dfrac{4-x}{x^2-16} = 0$

a) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4} = 0$ $\qquad$ Podmínky: $x^2-4 \neq 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$.

Čitatel: $x^2-5x+6=0$

$(x-3)\cdot(x-2)=0$

$x_1 = 3$ $\qquad$ $x_2 = 2$ (zakazuje podmínka $\Rightarrow$ 2 není kořenem) $\qquad$ $K = \{3\}$

b) $\dfrac{x^2-9}{x^2+2x-3} = 0$ $\qquad$ Podmínky: $x^2+2x-3 \neq 0 \Rightarrow (x+3)(x-1) \neq 0 \Rightarrow x \neq 1; x \neq -3$.

Čitatel: $(x+3)\cdot(x-3)=0$

$x_1 = -3$ (vyloučeno podmínkou) $\qquad$ $x_2 = 3$ $\qquad$ $K = \{3\}$

c) $\dfrac{4-x}{x^2-16} = 0$ $\qquad$ Podmínky: $x^2-16 \neq 0 \Rightarrow (x-4)(x+4) \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 4$.

Čitatel: $4-x=0$

$x = 4$ (vyloučeno podmínkou $\Rightarrow$ rovnice nemá řešení) $\qquad$ $K = \emptyset$

Př. 4: Vyřeš rovnici $\dfrac{3x-2}{x+5} = 2$.

Pozor: Na pravé straně není 0.

Podmínka: $x+5 \neq 0 \Rightarrow x \neq -5$.

Dvě možnosti řešení:
1) Odstranění zlomku
Odstraníme zlomek (máme podmínku $\Rightarrow$ víme, že nenásobíme nulou) a řešíme jako obyčejnou lineární rovnici.

$$\frac{3x-2}{x+5}=2 \qquad /\cdot\left(x+5\right)$$
$$3x-2=2\cdot\left(x+5\right)$$
$$3x-2=2x+10$$
$$x=12 \qquad\qquad K=\{12\}$$

2) Převedením na podílový tvar
Převedeme 2 na levou stranu a pak řešíme jako předchozí příklady.

$$\frac{3x-2}{x+5}-2=0$$
$$\frac{3x-2-2\cdot\left(x+5\right)}{x+5}=0$$
$$\frac{3x-2-2x-10}{x+5}=0$$
$$\frac{x-12}{x+5}=0$$
$$x=12 \qquad\qquad K=\{12\}$$

Pedagogická poznámka: Všichni studenti řeší rovnici prvním způsobem. Druhý jim ukazuji pouze jako druhou možnost.

Př. 5: Vyřeš rovnici $\frac{2x+6}{x+3}=3$ odstraněním zlomku i převedením na podílový tvar.

Podmínka: $x+3\neq 0 \Rightarrow x\neq -3$
1) Odstraněním zlomku

$$\frac{2x+6}{x+3}=3 \qquad /\cdot\left(x+3\right)$$
$$2x+6=3\cdot\left(x+3\right)$$
$$2x+6=3x+9$$

$x=-3$ Není řešením rovnice, vyloučili jsme na začátku v podmínce.
$K=\emptyset$

2) Převedením na podílový tvar

$$\frac{2x+6}{x+3}-3=0$$
$$\frac{2x+6-3\left(x+3\right)}{x+3}=0$$
$$\frac{2x+6-3x-9}{x+3}=0$$

$$\frac{-(x+3)}{x+3}=0$$

$-1=0$ $\qquad K=\emptyset$

Pedagogická poznámka: Pokud studenti nestíhají doporučuji vynechat příklad 6 a spočítat příklady 7 a 8.

Př. 6: Vyřeš rovnici $\frac{x-3}{x+2}+\frac{2x-3}{x-1}=3$.

Podmínky: $x+2\neq 0 \Rightarrow x\neq -2$ $\qquad x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq 1$

Odstraníme zlomky:

$$\frac{x-3}{x+2}+\frac{2x-3}{x-1}=3 \quad /(x+2)(x-1)$$

$$(x-3)(x-1)+(2x-3)(x+2)=3(x+2)(x-1)$$

$$x^2-x-3x+3+2x^2+4x-3x-6=3\left(x^2-x+2x-2\right)$$

$$3x^2-3x-3=3x^2+3x-6$$

$$3=6x$$

$$x=\frac{1}{2} \qquad K=\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Př. 7: Vyřeš rovnici $\frac{x-1}{x+1}=\frac{2-x}{x-3}+\frac{4}{(x+1)(x-3)}$ v množině celých čísel.

Podmínky: $x+1\neq 0 \Rightarrow x\neq -1$ $\qquad x-3\neq 0 \Rightarrow x\neq 3$

$$\frac{x-1}{x+1}=\frac{2-x}{x-3}+\frac{4}{(x+1)(x-3)} \quad /\cdot(x+1)(x-3)$$

$$(x-3)(x-1)=(2-x)(x+1)+4$$

$$x^2-x-3x+3=2x+2-x^2-x+4$$

$$x^2-4x+3=-x^2+x+6$$

$$2x^2-5x-3=0$$

Kvadratická rovnice $\Rightarrow$ vzorec už známe:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 2(-3)}}{2\cdot 2}=\frac{5\pm\sqrt{49}}{4}=\frac{5\pm 7}{4}$$

$$x_1=\frac{5+7}{4}=3 \qquad x_2=\frac{5-7}{4}=-\frac{1}{2}$$

Kontrola s podmínkami a zadáním:

3 – není kořen (podmínka) $\qquad -\frac{1}{2}$ - není kořen (není celé číslo)

$K=\emptyset$

Př. 8: Ve kterých množinách má předcházející příklad řešení?

V takových množinách, které obsahují číslo $-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ například v množině racionálních nebo reálných čísel.

Př. 9: Petáková:
strana 12/cvičení 3 a) b)

Shrnutí: Při řešení rovnic v podílovém tvaru musíme kontrolovat, zda zjištěné kořeny nejsou v rozporu s podmínkami pro definiční obor výrazů.