1.2.9 Absolutní hodnota

Předpoklady: základní početní operace

$|2| = 2$

$|0| = 0$ $\Rightarrow$ S nezápornými čísly absolutní hodnota nic nedělá

$|\pi| = \pi$

$|-2| = 2$

$\left|-\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}$ $\Rightarrow$ Záporná čísla absolutní hodnota změní na kladná (vynásobí je –1)

$|-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$

Absolutní hodnota = zabiják mínusů

Př. 1: Sestav definici absolutní hodnoty reálného čísla *a*.

Definice:
Absolutní hodnotu $|a|$ reálného čísla *a* definujeme takto:
Je-li $a \geq 0$, pak $|a| = a$ (s nezápornými nic nedělá).
Je-li $a < 0$, pak $|a| = -a$ (záporným změní znaménko na plus)

Poznámka: Definici absolutní hodnoty nemusíme vnímat jenom jako definici, ale také jako návod na její odstranění $\Rightarrow$ umožňuje nám přepsat výraz s absolutní hodnotou tak, aby se v něm už dále nevyskytovala (bohužel pouze za cenu rozdvojení postupu).

Př. 2: Vysvětli, proč přes zápis: Je-li $a < 0$, pak $|a| = -a$, nevyjde pro záporná čísla absolutní hodnota záporné číslo (i když v zápisu je před *a* mínus).

Mínus před *a* neříká nic o znaménku čísla, říká, že hodnotu *a* násobíme (-1), tím změníme znaménko čísla *a* a pokud je *a* záporné, získáme tím kladné číslo.

Př. 3: Ověř dosazením, že pro záporná čísla *a* platí $|a| = -a$.

Například $a = -3$

$|a| = |-3| = 3$

$-a = -(-3) = 3$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklady vypadají zbytečně, ale polovina dětí si doopravdy myslí, že jakmile před něco napíšou mínus, je to záporné. Je potřeba je neustále vyvádět z omylu, protože u proměnných záleží na tom, jaké je znaménko čísla, které proměnná zrovna obsahuje.

Důsledky:

- vyjde vždy nezáporné číslo
- platí $\sqrt{a^2} = |a|$ (kladná hodnota řeší problém se znaménkem, které se při umocňování ztratí)
- $\begin{matrix} |2| = |-2| \\ |a| = |-a| \end{matrix}$ $\Rightarrow$ absolutní hodnoty opačných čísel se rovnají

Př. 4: Spočti:

a) $\left|-2+|-3|\right| =$

b) $\left|-5+(-2)|2-3|\right|-8=$

c) $\left|2-|3|+4|-2|\right|-|3.(-2)|=$

a) $\left|-2+|-3|\right| = |-2+3| = |1| = 1$

b) $\left|-5+(-2)|2-3|\right|-8 = |-5+(-2)1|-8 = |-5-2|-8 = |-7|-8 = 7-8 = -1$

c) $\left|2-|3|+4|-2|\right|-|3.(-2)| = |2-3+4.2|-|-6| = |7|-|-6| = 7-6 = 1$

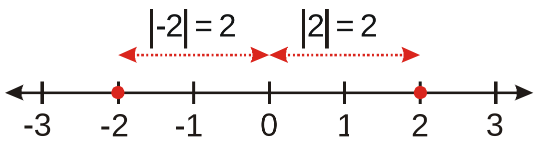
V bodě b) vyšlo záporné číslo, i když výraz obsahoval absolutní hodnotu, protože navíc obsahoval i odčítání 8. $\Rightarrow$ absolutní hodnota s jistotou zajistí nezápornost výrazu, pouze když je poslední operací v pořadí.

Pedagogická poznámka: Předchozí připomínka není úplně zbytečná. Například při kreslení grafů začnou někteří studenti podvědomě aplikovat pravidlo, že všechno, co obsahuje absolutní hodnotu, nemůže být nikdy záporné.

Geometrická interpretace absolutní hodnoty:

$|2| = |-2| = 2$

Co mají 2 a –2 stejné? – vzdálenost od nuly



$\Rightarrow$ **absolutní hodnota se rovná vzdálenosti obrazu čísla na číselné ose od počátku** (proto je vždy kladná a shodná pro opačná čísla).

Pedagogická poznámka: Někdy děti geometrickou interpretaci navrhnout místo definice absolutní hodnoty, takže si pak můžete ušetřit zdůvodňování.

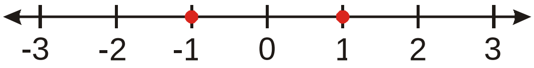
Př. 5: Na číselné ose znázorni všechna reálná čísla, pro něž platí:

a) $|x| = 1$

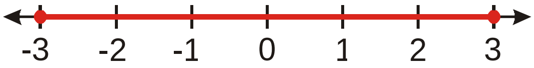
b) $|x| \le 3$

c) $|x| > 2$

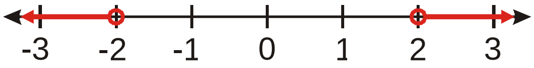
a) $|x| = 1$ $\Rightarrow$ hledám čísla, která jsou vzdálena od nuly o jedničku



b) $|x| \le 3$ $\Rightarrow$ hledám čísla, která jsou vzdálena od nuly o tři nebo méně



c) $|x| > 2$ $\Rightarrow$ hledám čísla, která jsou vzdálena od nuly více než o dva

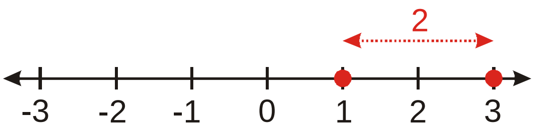


Prázdné kolečko znamená, že číslo v něm nepatří mezi čísla, která jsme hledali.

Pedagogická poznámka: Je potřeba pohlídat a sjednotit grafické vyjádřeni.

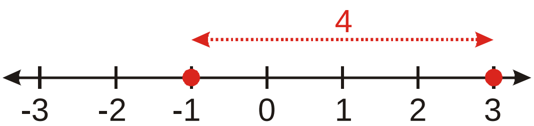
Další zajímavý postřeh:

$$|3-1| = |2| = 2$$
$$|1-3| = |-2| = 2$$
$\Rightarrow$ stejné výsledky, nemá to i geometrický význam?



$\Rightarrow$ obrazy obou čísel jsou vzdáleny o 2

Platí to vždy?
zkusím čísla –1 a 3



$$|3-(-1)| = |3+1| = 4$$
$$|(-1)-3| = |-4| = 4$$
$\Rightarrow$ zřejmě platí vždy

Vzdálenost obrazů reálných čísel *a*, *b* na číselné ose je rovna $|a-b| = |b-a|$.

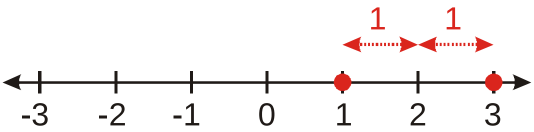
Poznámka: Jde o zobecnění předchozího pravidla - $|2| = |2-0| = 2$ - absolutní hodnota je vzdálenost od 0

Př. 6: Na číselné ose znázorni všechna reálná čísla, pro něž platí:

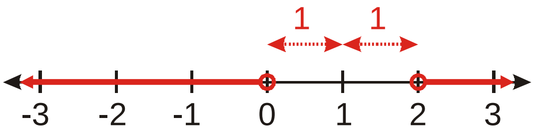
a) $|x-2| = 1$ b) $|x-1| > 1$ c) $|x+1| \le 2$

d) $|x+2| > -1$ e) $|x-\sqrt{2}| < 2$ f) $|1-x| \le 2$

a) $|x-2| = 1$ $\Rightarrow$ hledám čísla vzdálená od 2 o jedna



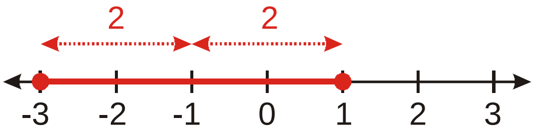
b) $|x-1|>1 \Rightarrow$ hledám čísla vzdálená od 1 o víc než o jedna



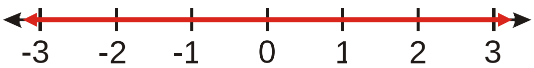
c) $|x+1|\leq 2$

problém: v absolutní hodnotě není rozdíl čísel $\Rightarrow$ musím ho vyrobit:

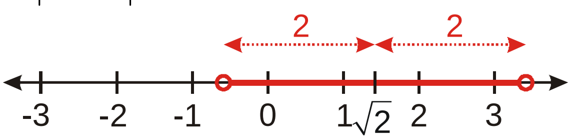
$|x+1|=|x-(-1)|\leq 2 \Rightarrow$ hledám čísla vzdálená od -1 o dva nebo méně



d) $|x+2|=|x-(-2)|>-1 \Rightarrow$ hledám čísla vzdálená od -1 o víc než o -1 $\Rightarrow$ to jsou všechna čísla

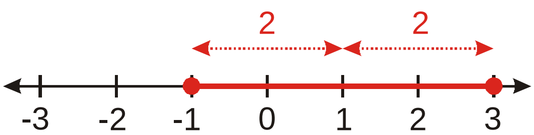


e) $|x-\sqrt{2}|<2 \Rightarrow$ hledám čísla vzdálená od $\sqrt{2}$ méně než o dvě



f) $|1-x|\leq 2$

problém: v absolutní hodnotě je x až druhé v pořadí $\Rightarrow$ není to žádný problém, protože nezáleží na pořadí čísel v rozdílu a je možné si absolutní hodnotu přepsat $|1-x|=|x-1|\leq 2 \Rightarrow$ hledám čísla vzdálená od 1 o dva nebo méně



Pedagogická poznámka: Cíle jednotlivých bodů:

c) překonání problému se součtem v absolutní hodnotě, je dobré opět připomenout, jak silná zbraň se skrývá v možnosti něco si napsat tak, jak potřebuji (ale tak, aby to zůstalo stejné)

d) orientace v nezvyklé situaci, ačkoliv příklad na první pohled nepřináší nic nového, studenti neví,v jaké vzdálenosti mají nakreslit body, ze kterých bude řešení vycházet. Připomínám, že pomůže návrat k podstatě, o kterou v příkladu jde.

e) „znormálnění“ odmocnin

f) opět orientace v nezvyklé situaci. Kdo si uvědomí, že na pořadí v rozdílu uvnitř absolutní hodnotě nezáleží? Zkusí někdo vytknout -1?

Př. 7: Do výrazu $|x+3|$ dosaď za x postupně čísla $\{-7;-4;-3;-2;\ 0;1\}$. Na základě výsledků stanov pravidlo, pro která čísla dosazovaná za x mění absolutní hodnota znaménko výrazu uvnitř.
Sestav předpis pro odstranění této absolutní hodnoty (ekvivalent definice absolutní hodnoty ze začátku kapitoly).

$x=-7 \quad \Rightarrow \quad |x+3|=|-7+3|=|-4|=4 \quad \Rightarrow$ změna znaménka

$x=-4 \quad \Rightarrow \quad |x+3|=|-4+3|=|-1|=1 \quad \Rightarrow$ změna znaménka

$x=-3 \quad \Rightarrow \quad |x+3|=|-3+3|=|0|=0 \quad \Rightarrow$ bez změny znaménka

$x=-2 \quad \Rightarrow \quad |x+3|=|-2+3|=|1|=1 \quad \Rightarrow$ bez změny znaménka

$x=0 \quad \Rightarrow \quad |x+3|=|0+3|=|3|=3 \quad \Rightarrow$ bez změny znaménka

$x=1 \quad \Rightarrow \quad |x+3|=|1+3|=|4|=4 \quad \Rightarrow$ bez změny znaménka

$\Rightarrow$ absolutní hodnota mění znaménko výrazu uvnitř, když za x dosadím menší číslo než –3.

původní definice:
Je-li $a \geq 0$, pak $|a|=a$ (s nezápornými nic nedělá).
Je-li $a<0$, pak $|a|=-a$ (záporným změní znaménko na plus)

$\Rightarrow$ absolutní hodnota se řídí znaménkem výrazu uvnitř $\Rightarrow$ záleží zda je $x+3$ kladné nebo záporné
$\Rightarrow$ Pro $|x+3|$ platí:

- Je-li $x \geq -3$, pak $|x+3|=x+3$ (výraz $x+3$ je kladný, takže jsem nic nedělal)
- Je-li $x<-3$, pak $|x+3|=-(x+3)=-x-3$ (výraz $x+3$ je záporný, takže jsem obracel znaménko)

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je předehra k „metodě dělení definičního oboru“, tedy ke všem postupům (nerovnosti v podílovém tvaru, rovnice, nerovnice, funkce s absolutní hodnotou), kde při řešení příkladu musíme vytvořit několik různých větví.

Shrnutí: Absolutní hodnota mění své chování podle toho, jaké je znaménko čísla, které obsahuje.