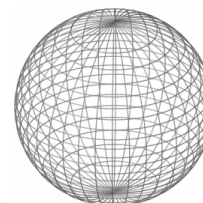


KOULE

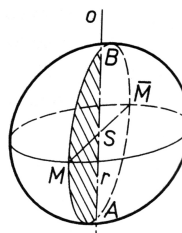
Kulová plocha

- = množina bodů v prostoru, které mají od daného pevného bodu S vzdálenost $r > 0$
- vznikne rotací půlkružnice
- střed koule je také středem kulové plochy
- kružnice kulové plochy ležící v rovině procházející středem je **hlavní kružnice**
- kružnice kulové plochy, která neleží v rovině procházející středem, je **vedlejší kružnice**



Koule

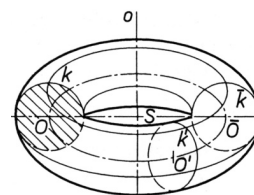
- = množina bodů v prostoru, které mají od daného pevného bodu S vzdálenost menší nebo rovnu kladnému číslu r
- = těleso, které vznikne rotací půlkruhu kolem přímky, která obsahuje jeho průměr
- značení: $K(S;r)$
- pojmy: S – střed koule
- r – poloměr koule (SA, SB)
- \overline{MM} – průměr koule
- hranice koule – **kulová plocha**



Vlastnosti koule:

- ❖ je dokonale symetrická
 - ✓ je středově souměrná podle středu S
 - ✓ je osově souměrná podle lib. přímky procházející středem S
 - ✓ je rovinově souměrná podle lib. roviny procházející S
- ❖ povrch koule tvoří kulová plocha se stejným středem a poloměrem
- ❖ libovolným řezem koule je kružnice

Poznámka: Rotací kruhu kolem přímky, která leží v rovině kruhu a kruh neprotíná, vznikne anuloid.

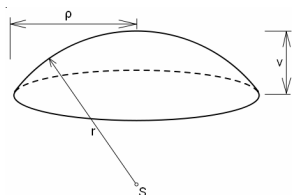
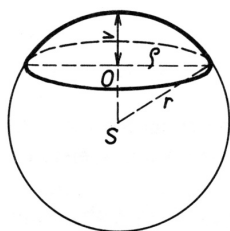


Části koule a kulové plochy

Kulový vrchlík

= část kulové plochy omezená její libovolnou kružnicí

= průnik kulové plochy a poloprostoru s hraniční rovinou obsahující kružnici k
(tato rovina rozdělí kulovou plochu na dva kulové vrchlíky)



kružnice = hrana kul. vrchlíku

ρ – poloměr hraniční kružnice

r – poloměr koule

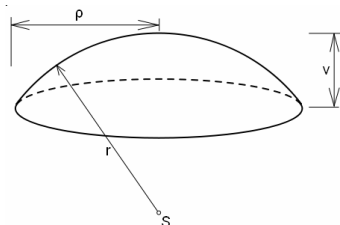
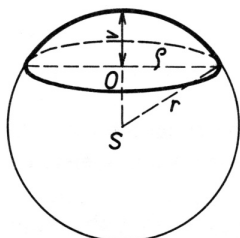
v – výška vrchlíku

Kulová úseč

= část koule omezená její libovolnou kružnicí

= průnik koule a poloprostoru, jehož hraniční rovina protíná kouli v kruhu o poloměru ρ

– kulový vrchlík a kruh tvoří hranici kulové úseče



kruh – podstava kul. úseče

ρ – poloměr podstavy

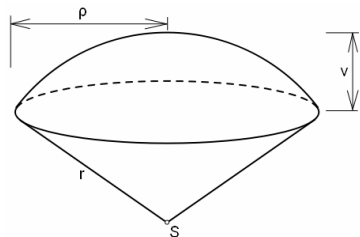
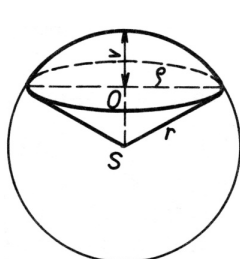
r – poloměr koule

v – výška kulové úseče

Kulová výseč

= sjednocení kulové úseče a rotačního kužele, který má s kul. úsečí společnou podstavu
a jeho vrchol je středem příslušné koule

– hranicí je plášť kužele a kulový vrchlík



ρ – poloměr hraniční kružnice

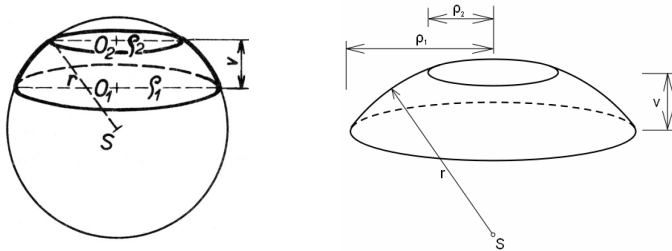
r – poloměr koule

v – výška kulové výseče

Kulová vrstva, kulový pás

Kulový pás je průnik kulové plochy a vrstvy s hraničními rovinami, jejichž vzdálenosti od středu jsou menší než poloměr

Kulová vrstva je průnik koule a vrstvy s hraničními rovinami, jejichž vzdálenosti od středu jsou menší než poloměr koule



r – poloměr koule

O_1, O_2 = středy hraničních kružnic

ρ_1, ρ_2 – poloměry hranič. kružnic

v – výška kul. vrstvy (pásu)

Příklad: Koule se středem S a poloměrem 15 cm je položena na vodorovné rovině α a osvětlena zdrojem Z ; $SZ \perp \alpha$, $|Z\alpha| = h = 45$ cm. Určete:

- poloměr kružnice ohraničující osvětlenou část koule a výšku osvětlené části koule,
- obsah vrženého stínu koule na rovinu ρ .

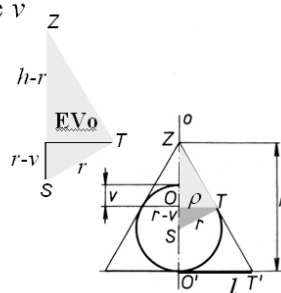
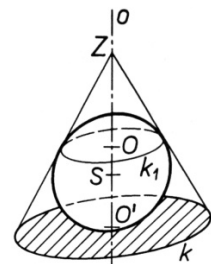
Řešení:

- a) osvětlená část koule = kul. vrchlík o výšce v

$$\begin{array}{ll} \triangle STZ: & \triangle STZ: \\ r^2 = (h-r) \cdot (r-v) & r^2 = (r-v)^2 + \rho^2 \\ \underline{v = 7,5 \text{ (cm)}} & \underline{\rho = 13 \text{ (cm)}} \end{array}$$

- b) vržený stín = obsah kruhu se středem O'

$$\begin{array}{l} \triangle ZOT \approx \triangle ZO'T' \implies \frac{l}{\rho} = \frac{h}{h-2r+v} \\ \underline{S = 2120 \text{ (cm}^2\text{)}} \longleftarrow \underline{l = 26 \text{ (cm)}} \end{array}$$



ZT – tečna kul. plochy

Cvičení:

Příklad 1: Kulová úseč má poloměr podstavy 8 cm a výšku 5 cm. Vypočítejte poloměr koule, jejíž částí je kulová úseč.

Příklad 2: Ve vzdálenosti 10 cm od středu koule s poloměrem 20 cm vedte rovinu řezu. Vypočítejte poloměr řezu.

Příklad 3: Je dána krychle s hranou délky a . Vypočítejte poloměr koule, která je krychli opsaná a vepsaná.

Objem a povrch koule a jejích částí

Objem koule a jejích částí

Koule: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ r - poloměr koule

Kulová úseč: $V = \frac{\pi v}{6} (3\rho^2 + v^2)$ ρ - poloměr podstavy úseče
 v - výška úseče

Kulová výšeč: $V = \frac{2}{3} \pi r^2 v$ r - poloměr koule
 v - výška výšeče

Kulová vrstva: $V = \frac{\pi v}{6} (3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + v^2)$
 ρ_1, ρ_2 - poloměry podstav vrstvy
 v - výška vrstvy

Povrch koule a jejích částí

Koule: $S = 4\pi r^2$ r - poloměr koule

Poznámka: Povrch koule = obsah kulové plochy se stejným r

Kulový vrchlík nebo kulový pás:

$S = 2\pi r v$ r - poloměr kulové plochy
 v - výška vrchlíku (pásu)

Poznámka: Objem a povrch anuloidu:

$V = 2\pi^2 r^2 R$ $S = 4\pi^2 Rr$

r - poloměr kruhu pro rotaci
 R - vzdálenost středu kruhu od osy rotace

Příklad: Nakloníme-li o 30° nádobu tvaru polokoule, která byla zcela naplněna vodou, vyteče z ní 3,3 l vody. Kolik litrů vody v ní zůstane?

Řešení: Zbytek vody v nádobě má tvar kulové úseče:

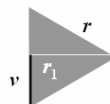
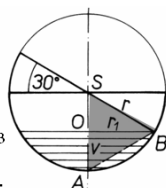
$$V = \frac{\pi v}{6} (3r_1^2 + v^2) = \frac{\pi \frac{r}{2}}{6} \left(3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} r \right)^2 + \left(\frac{r}{2} \right)^2 \right) = \frac{5}{24} \pi r^3$$

$$V = 5 \cdot \frac{1}{24} \pi r^3 = \underline{1,5 \text{ l}}$$

ΔSAB je rovnostranný $\Rightarrow v = \frac{r}{2}$

$$\sin 60^\circ = \frac{r_1}{r} \Rightarrow r_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} r$$

Při naklonění vyteče 3,3 l, $\frac{2}{3} \pi r^3 - \frac{5}{24} \pi r^3 = 3,3 \text{ l} \Rightarrow \frac{1}{24} \pi r^3 = 0,3 \text{ l}$
tj. V polokoule - V úseče:



Cvičení:

Příklad 1: Kolikrát se zmenší objem a povrch koule, jestliže se její poloměr zmenší třikrát?

Příklad 2: Jakou hmotnost má planeta Země, je-li její průměrná hustota $5,52 \text{ g/cm}^3$.

Příklad 3: Jak vysoko musí být letec, má-li vidět 0,001 zemského povrchu?

Příklad 4: Vypočítejte objem a povrch kulové výšeče, má-li kul. úseč, která je částí výšeče, poloměr podstavy 6 cm a výšku 2 cm.

Příklad 5: Činka se skládá ze dvou koulí a spojovací tyče délky 60 cm s průměrem 32 mm. Jaký je průměr koulí, je-li hmotnost činky 50 kg a hustota materiálu $7,8 \text{ g/cm}^3$?

Příklad 6: Vypočítejte povrch kulového vrchlíku a objem kul. úseče, je-li poloměr koule 10 cm a výška kulové úseče 6 cm.